ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 26, № 136 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-394-403

УДК 519.6

Об одной некорректно поставленной краевой задаче для метагармонического уравнения в круговом цилиндре

Евгений Борисович ЛАНЕЕВ, Виктор Александрович АНИСИМОВ, Полина Александровна ЛЕСИК, Виктория Ивановна РЕМЕЗОВА, Андрей Андреевич РОМАНОВ, Анна Георгиевна ХЕГАЙ

ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов»

117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

Аннотация. Рассматривается смешанная по краевым условиям задача для метагармонического уравнения в области, представляющей собой часть кругового цилиндра. Эту цилиндрическую область с одной стороны ограничивает поверхность общего вида, на которой заданы условия Коши, т. е. заданы функция и ее нормальная производная. Другая граница цилиндрической области свободна. На боковой поверхности цилиндрической области заданы однородные краевые условия первого рода. Задача некорректно поставлена и ее приближенное решение, устойчивое к погрешности в данных Коши, построено с применением методов регуляризации. Рассматриваемая задача сведена к интегральному уравнению Фредгольма первого рода. На основе решения интегрального уравнения, полученного в виде ряда Фурье по собственным функциям первой краевой задачи для уравнения Лапласа в круге, построено явное представление точного решения поставленной задачи. Устойчивое решение интегрального уравнения построено методом регуляризации Тихонова. В качестве приближенного решения интегрального уравнения рассматривается экстремаль функционала Тихонова. На основе этого решения строится приближенное решение задачи в целом. Приведена теорема сходимости приближенного решения поставленной задачи к точному при стремлении к нулю погрешности в данных Коши и при согласовании параметра регуляризации с погрешностью в данных. Результаты работы могут быть использованы для математической обработки данных тепловидения в ранней диагностике в медицине.

Ключевые слова: некорректно поставленная задача, метагармоническое уравнение, функции Бесселя, интегральное уравнение первого рода, метод регуляризации Тихонова

Для цитирования: *Ланеев Е.Б., Анисимов В.А., Лесик П.А., Ремезова В.И., Романов А.А., Хегай А.Г.* Об одной некорректно поставленной краевой задаче для метагармонического уравнения в круговом цилиндре // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 136. С. 394–403. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-394-403.

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-394-403

On an ill-posed boundary value problem for a metaharmonic equation in a circular cylinder

Evgeniy B. LANEEV, Viktor A. ANISIMOV, Polina A. LESIK, Viktoriya I. REMEZOVA, Andrey A. ROMANOV, Anna G. KHEGAI

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

6 Miklukho-Maklay St., Moscow 117198, Russian Federation

Abstract. In this paper, we consider a mixed problem for a metaharmonic equation in a domain in a circular cylinder. The cylindrical area is bounded on one side by an arbitrary surface on which the Cauchy conditions are set, i. e. the function and its normal derivative are set. The other border of the cylindrical area is free. On the lateral surface of the cylindrical domain, homogeneous boundary conditions of the first kind are given. The problem is ill-posed and its approximate solution, stable to errors in the Cauchy data, is constructed using regularization methods. The problem is reduced to a first kind Fredholm integral equation. Based on the solution of the integral equation obtained in the form of a Fourier series by the eigenfunctions of the first boundary value problem for the Laplace equation in a circle, an explicit representation of the exact solution of the problem is constructed. A stable solution of the integral equation is obtained by the method of Tikhonov regularization. The extremal of the Tikhonov functional is considered as an approximate solution. Based on this solution, an approximate solution of the problem as a whole is constructed. A theorem on convergence of the approximate solution of the problem to the exact one as the error in the Cauchy data tends to zero and the regularization parameter is matched with the error in the data, is given. The results can be used for mathematical processing of thermal imaging data in early diagnostics in medicine.

Keywords: ill-posed problem, metaharmonic equation, Bessel function, integral equation of the first kind, method of Tikhonov

Mathematics Subject Classification: 35R25, 35R30.

For citation: Laneev E.B., Anisimov V.A., Lesik P.A., Remezova V.I., Romanov A.A., Khegai A.G. Ob odnoy nekorrektno postavlennoy krayevoy zadache dlya metagarmonicheskogo uravneniya v krugovom tsilindre [On an ill-posed boundary value problem for a metaharmonic equation in a circular cylinder]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 136, pp. 394–403. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-394-403. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В работе рассматривается некорректно поставленная смешанная краевая задача для метагармонического уравнения в круговом цилиндре с условиями Коши на поверхности общего вида. Такая задача возникает в медицинской диагностике как задача обработки термографических данных [1] с целью выявления патологий у пациента, которые могут быть сопоставлены аномальным стационарным источникам тепла в теплопроводящей среде со стационарным распределением температуры, удовлетворяющим стационарному уравнению теплопроводности, т. е. уравнению Лапласа. Учет влияния кровотока приводит к метагармоническому уравнению [2]. Функция температуры на поверхности тела, регистрируемая как термограмма, дает представление о плотности распределения источников тепла внутри тела. Как правило, такое представление сильно искажено за счет удаленности источников тепла от поверхности исследуемого тела. Уточненную информацию об источниках можно получить, анализируя распределение температуры вблизи источников, решая задачу продолжения метагармонической функции с границы в сторону источников по известной функции и нормальной производной на границе. Следуя работам [3, 4, 5], в которых решена соответствующая задача для уравнения Лапласа в цилиндрической области прямоугольного сечения [3, 4] и в области кругового цилиндра [5], краевая задача для метагармонического уравнения приведена к линейному интегральному уравнению первого рода, устойчивое решение которого строится на основе метода регуляризации Тихонова [6]. Рассматриваемая здесь задача аналогична задаче продолжения поля ньютоновского потенциала с плоской поверхности [7].

1. Постановка задачи

Имеется цилиндрическая область кругового сечения

$$D(F,H)=\{(r,\varphi,z):\ 0<r<a,\ \ 0<\varphi<2\pi,\ \ F(r,\varphi)<z<H\},$$

ограниченная поверхностью общего вида

$$S=\{(r,\varphi,z):\ 0<r<a,\ \ 0<\varphi<2\pi,\ \ z=F(r,\varphi)<H\}.$$

В этой области рассмотрим краевую задачу для метагармонического уравнения

$$\begin{aligned}
&\Delta u(M)-k^2u(M)=0, \quad M\in D(F,H),\ \ k=const,\\
&u|_S=f,\\
&\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=g,\\
&u|_{r=a}=0,
\end{aligned} \tag{1.1}$$

включающую условия Коши на поверхности S и однородные условия первого рода на боковой поверхности цилиндра. Граница $z=H$ открыта.

Будем считать, что функции f и g непрерывны на S и обеспечивают существование решения $u\in C^2(D(F,H))\bigcap C^1(\overline{D(F,H)})$.

Смешанная задача (1.1) с условиями Коши некорректно поставлена. Решение задачи неустойчиво по отношению к погрешности в данных f и g. Получим явное выражение точного решения задачи в зависимости от точных данных Коши f и g.

2. Точное решение краевой задачи

Пусть $\varphi(M,P)$ — функция источника первой краевой задачи для метагармонического уравнения

$$\begin{aligned}&\Delta v(P) - k^2 v(P) = -\rho(P), \quad P \in D^\infty,\\&v|_{r=a} = 0,\\&v \to 0 \ \text{ при } \ |z| \to \infty\end{aligned}$$

в бесконечном круговом цилиндре

$$D^\infty = \{(r,\varphi,z) : \ 0 < r < a, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty\}.$$

Функция источника есть сумма фундаментального решения метагармонического уравнения и метагармонической по P функции $W(M,P)$

$$\varphi(M,P) = \frac{\exp\{-kr_{MP}\}}{4\pi r_{MP}} + W(M,P), \tag{2.1}$$

где r_{MP} — расстояние между точками M и P, и удовлетворяет граничным условиям. Функция источника (2.1) может быть представлена в виде разложения по собственным функциям оператора Лапласа в круге радиуса a

$$\varphi(M,P) = \frac{1}{\pi a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \epsilon_n \exp\{-k_{nm}|z_M - z_P|\} \frac{J_n(\mu_n^m \frac{r_M}{a}) J_n(\mu_n^m \frac{r_P}{a})}{k_{nm}[J_n'(\mu_n^m)]^2} \cos n(\varphi_M - \varphi_P),$$

$$\epsilon_0 = 0.5, \quad \epsilon_n = 1 \ \text{ при } \ n \neq 0.$$

Здесь J_n — функция Бесселя, μ_n^m, $m = 1,2,3,\ldots$ — нули функции J_n, а также введено обозначение

$$k_{nm} = \sqrt{\left(\frac{\mu_n^m}{a}\right)^2 + k^2}. \tag{2.2}$$

Пусть $M \in D(F,H)$. Применяя формулы Грина в области $D(F,H)$ к функции $u(P)$ — решению задачи (1.1) и функции источника $\varphi(M,P)$, получим

$$u(M) = \int\limits_{\partial D(F,H)} \Big[\frac{\partial u}{\partial n}(P)\varphi(M,P) - u(P)\frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M,P)\Big] d\sigma_P, \quad M \in D(F,H). \tag{2.3}$$

Учитывая однородные граничные условия для φ и u на боковой поверхности цилиндрической области $D(F,H)$, получим

$$u(M) = \int\limits_S \Big[g(P)\varphi(M,P) - f(P)\frac{\partial\varphi}{\partial n_P}(M,P)\Big] d\sigma_P + \int\limits_{\Pi(H)} \Big[\frac{\partial u}{\partial n}(P)\varphi(M,P) - u(P)\frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M,P)\Big] d\sigma_P, \tag{2.4}$$

где второй интеграл берется по кругу

$$\Pi(H) = \{(r,\varphi,z) : \ 0 < r < a, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad z = H\}. \tag{2.5}$$

Обозначим

$$\Phi(M) = \int\limits_{S} \Big[g(P)\varphi(M,P) - f(P)\frac{\partial\varphi}{\partial n_P}(M,P)\Big]d\sigma_P, \qquad z_M < H, \tag{2.6}$$

$$v(M) = \int\limits_{\Pi(H)} \Big[\frac{\partial u}{\partial n}(P)\varphi(M,P) - u(P)\frac{\partial\varphi}{\partial n_P}(M,P)\Big]d\sigma_P, \quad z_M < H, \tag{2.7}$$

тогда решение задачи (1.1) получим в виде

$$u(M) = v(M) + \Phi(M), \quad M \in D(F,H), \tag{2.8}$$

где функция Φ вычисляется по известным функциям f и g.

Функцию v можно рассматривать как решение задачи

$$\begin{aligned} &\Delta v(M) - k^2 v(M) = 0, \quad M \in D(-\infty,H),\\ &v|_{z=H} = v_H,\\ &v|_{r=a} = 0,\\ &v \to 0 \ \text{ при } \ z \to -\infty. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что если решение задачи (1.1) существует, то функция v может быть представлена в виде ряда Фурье

$$v(M) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \exp\{k_{nm}(z_M - H)\} J_n\big(\mu_n^m \frac{r}{a}\big)\big[(\tilde v_H)^c_{nm}\cos n\varphi + (\tilde v_H)^s_{nm}\sin n\varphi\big], \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} (\tilde v_H)^c_{nm} &= \frac{2\epsilon_n}{\pi a^2[J_n'(\mu_n^m)]^2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a r dr v_H(r,\varphi) J_n(\mu_n^m\frac{r}{a})\cos n\varphi,\\ &\qquad\qquad \epsilon_0 = 0.5, \quad \epsilon_n = 1 \ \text{ при } \ n \neq 0,\\ (\tilde v_H)^s_{nm} &= \frac{2}{\pi a^2[J_n'(\mu_n^m)]^2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a r dr v_H(r,\varphi) J_n(\mu_n^m\frac{r}{a})\sin n\varphi, \end{aligned} \tag{2.10}$$

причем ряд (2.9) сходится равномерно области $D(-\infty, H-\varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$, так как

$$\big|(\tilde v_H)^c_{nm}\exp\{k_{nm}(z_M - H)\}J_n\big(\mu_n^m\frac{r}{a}\big)\cos n\varphi\big| \leqslant \big|(\tilde v_H)^c_{nm}\big|\exp\{-k_{nm}\varepsilon\}.$$

Аналогичная оценка справедлива и для $(\tilde v_H)^s_{nm}$.

Таким образом, из представления (2.8) решения задачи (1.1) и (2.9) следует, что для получения явного выражения для точного решения задачи (1.1) достаточно выразить функцию v_H в (2.9) через заданные функции f и g.

Из (2.9), (2.10) функция v может быть выражена через v_H в виде интеграла

$$v(M) = \int\limits_{\Pi(H)} G(M,P) v_H(P) r_P dr_P d\varphi_P, \quad M \in D(-\infty,H), \tag{2.11}$$

где

$$G(M,P) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\epsilon_n \exp\{k_{nm}(z_M - H)\}\frac{J_n\big(\mu_n^m\frac{r_M}{a}\big)J_n\big(\mu_n^m\frac{r_P}{a}\big)}{a^2[J_n'(\mu_n^m)]^2}\cos n(\varphi_M - \varphi_P),$$
$$\epsilon_0 = 0.5, \quad \epsilon_n = 1 \ \text{ при } \ n \neq 0. \tag{2.12}$$

Покажем, что функция v_H удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма первого рода. Пусть $M \in D(-\infty, F)$, где

$$D(-\infty, F) = \{(r, \varphi, z): \ 0 < r < a, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < F(r, \varphi)\}.$$

Применяя формулу Грина в области $D(F, H)$ к функции $u(P)$ — решению задачи (1.1) и функции $\varphi(M, P)$ вида (2.1), аналогично (2.3) получим

$$0 = \int\limits_{\partial D(F,H)} \Big[\frac{\partial u}{\partial n}(P)\varphi(M,P) - u(P)\frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M,P)\Big] d\sigma_P, \quad M \in D(F, H).$$

Отсюда с учетом однородных граничных условий для φ и u и обозначений (2.6) и (2.7) получим

$$v(M) = -\Phi(M), \quad M \in D(-\infty, F). \tag{2.13}$$

Пусть $b < \min\limits_{(r,\varphi)} F(r, \varphi)$ и $M \in \Pi(b)$, где $\Pi(b)$ — область вида (2.5) при $z = b$, тогда из (2.13) и (2.11) получим интегральное уравнение первого рода

$$\int\limits_{\Pi(H)} G(M, P) v_H(P) dx_P dy_P = -\Phi(M), \quad M \in \Pi(b). \tag{2.14}$$

Из уравнения (2.14) с учетом разложения (2.12) при $z_M = b$ получаем соотношение между коэффициентами Фурье единственного решения v_H и коэффициентами Фурье правой части

$$\begin{aligned} -(\tilde{v}_H)^c_{nm} \exp\{-k_{nm}(H - b)\} = \tilde{\Phi}^c_{nm}(b), \\ -(\tilde{v}_H)^s_{nm} \exp\{-k_{nm}(H - b)\} = \tilde{\Phi}^s_{nm}(b), \end{aligned} \tag{2.15}$$

где $\tilde{\Phi}^c_{nm}(b), \tilde{\Phi}^s_{nm}(b)$ — коэффициенты Фурье функции $\Phi(M)|_{M\in\Pi(b)}$:

$$(\tilde{\Phi})^c_{nm}(b) = \frac{2\epsilon_n}{\pi a^2 [J'_n(\mu^m_n)]^2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r dr \Phi(r, \varphi, b) J_n\big(\mu^m_n \frac{r}{a}\big) \cos n\varphi,$$

$$\epsilon_0 = 0.5, \quad \epsilon_n = 1 \ \text{при} \ n \neq 0,$$

$$(\tilde{\Phi})^s_{nm}(b) = \frac{2}{\pi a^2 [J'_n(\mu^m_n)]^2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r dr \Phi(r, \varphi, b) J_n\big(\mu^m_n \frac{r}{a}\big) \sin n\varphi.$$

Отметим, что формулы (2.15) характеризуют убывание коэффициентов Фурье $\tilde{\Phi}_{nm}(b)$ с ростом n и k, если функции f и g таковы, что обеспечивают существование решения задачи (1.1) и, следовательно, функции v_H вида (2.9). Подставляя коэффициенты Фурье $(\tilde{v}_H)_{nm}$ из (2.15) в ряд (2.9), получим функцию v в области $D(-\infty, H)$

$$v(M) = -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \exp\{k_{nm}(H - b)\} J_n\big(\mu^m_n \frac{r}{a}\big) \big[(\tilde{\Phi})^c_{nm}(b) \cos n\varphi + (\tilde{\Phi})^s_{nm}(b) \sin n\varphi\big]. \tag{2.16}$$

Ряд (2.16), как и ряд (2.9), сходится равномерно в $D(-\infty, H - \varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$, если решение задачи (1.1) существует при данных f и g.

Формула (2.8), где функции v и Φ вида (2.16) и (2.6) соответственно, дает явное выражение для решения задачи 1.1.

3. Построение приближенного задачи в случае приближенных данных Коши

Пусть функции f и g в задаче (1.1) заданы с погрешностью, то есть вместо f и g заданы функции f^δ и g^δ, такие что

$$\|f^\delta - f\|_{L_2(S)} \leqslant \delta, \quad \|g^\delta - g\|_{L_2(S)} \leqslant \delta.$$

Построим приближенное решение задачи (1.1), сходящееся к точному решению при $\delta \to 0$. Функция Φ вида (2.6) в этом случае может быть получена приближенно:

$$\Phi^\delta(M) = \int\limits_S \Big[g^\delta(P)\varphi(M,P) - f^\delta(P)\frac{\partial\varphi}{\partial n_P}(M,P)\Big]d\sigma_P. \tag{3.1}$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского к разности функций (3.1) и (2.6) при $M \in \Pi(b)$, $b < \min\limits_{(r,\varphi)} F(r,\varphi)$, получим оценку погрешности правой части интегрального уравнения (2.14)

$$|\Phi^\delta(M) - \Phi(M)|_{M\in\Pi(b)} \leqslant \max_{M\in\Pi(b)} \big(\int\limits_S \varphi^2(M,P)d\sigma_P\big)^{1/2}\|g^\delta - g\|_{L_2(S)}$$
$$+ \max_{M\in\Pi(b)} \big(\int\limits_S \big[\frac{\partial\varphi}{\partial n_P}(M,P)\big]^2 d\sigma_P\big)^{1/2}\|f^\delta - f\|_{L_2(S)} \leqslant C\delta.$$

В качестве приближенного решения интегрального уравнения (2.14) с приближенной правой частью (3.1) будем рассматривать экстремаль функционала Тихонова [6] со стабилизатором нулевого порядка

$$M^\alpha[w] = \big\|Gw + \Phi^\delta\big\|^2_{L_2(\Pi(b))} + \alpha\|w\|^2_{L_2(\Pi(H))}, \quad \alpha > 0. \tag{3.2}$$

Экстремаль функционала может быть получена как решение уравнения Эйлера для функционала (3.2)

$$G^*Gw + \alpha w = -G^*\Phi^\delta,$$

которое, в свою очередь, с использованием разложения (2.12) ядра интегрального оператора G может быть представлено в виде алгебраических уравнений относительно коэффициентов Фурье функции w

$$\exp\{-2k_{nm}(H-b)\}\tilde{w}_{nm} + \alpha\tilde{w}_{nm} = -\exp\{-k_{nm}(H-b)\}\tilde{\Phi}^\delta_{nm}(b), \tag{3.3}$$

где $\tilde{\Phi}^\delta_{nm}(b)$ — в одном случае косинус-коэффициенты, в другом — синус-коэффициенты Фурье функции $\Phi^\delta(M)|_{M\in\Pi(b)}$

$$\tilde{\Phi}^\delta_{nm}(b) = (\tilde{\Phi}^\delta)^c_{nm}(b) = \frac{2\epsilon_n}{\pi a^2[J'_n(\mu^m_n)]^2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a rdr\Phi^\delta(r,\varphi,b)J_n\big(\mu^m_n\frac{r}{a}\big)\cos n\varphi,$$
$$\epsilon_0 = 0.5, \quad \epsilon_n = 1 \text{ при } n \neq 0,$$
$$\tilde{\Phi}^\delta_{nm}(b) = (\tilde{\Phi}^\delta)^s_{nm}(b) = \frac{2}{\pi a^2[J'_n(\mu^m_n)]^2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a rdr\Phi^\delta(r,\varphi,b)J_n\big(\mu^m_n\frac{r}{a}\big)\sin n\varphi.$$

Решая алгебраические уравнения относительно коэффициентов Фурье экстремали и подставляя их вместо коэффициентов Фурье функции v_H в ряд (2.9), найдем приближение v_α^δ к функции v в области $D(-\infty, H)$:

$$v_\alpha^\delta(M) = -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp\{k_{nm}(z_M - b)\} J_n(\mu_n^m \frac{r}{a})[(\tilde{\Phi}^\delta)_{nm}^c(b)\cos n\varphi + (\tilde{\Phi}^\delta)_{nm}^s(b)\sin n\varphi]}{1 + \alpha\exp\{2k_{nm}(H-b)\}}, \quad (3.4)$$

где k_{nm} определено формулой (2.2). Функция (3.4) отличается от точной функции v вида (2.16) регуляризирующим множителем $\big(1 + \alpha\exp\{2k_{nm}(H-b)\}\big)^{-1}$, обеспечивающим сходимость ряда.

В соответствие с (2.8) приближенное решение задачи (1.1) построим в виде

$$u_\alpha^\delta(M) = v_\alpha^\delta(M) + \Phi^\delta(M), \quad M \in D(F, H), \quad (3.5)$$

где v_α^δ и Φ^δ — функции вида (3.4) и (3.1) соответственно.

Для построенного приближенного решения (3.5) задачи (1.1) имеет место следующая теорема сходимости к точному решению.

Теорема 3.1. *Пусть решение задачи* (1.1) *существует. Тогда для любого* $\alpha = \alpha(\delta)$ *такого, что* $\alpha(\delta) \to 0$ *и* $\delta/\sqrt{\alpha(\delta)} \to 0$ *при* $\delta \to 0$ *функция* $u_{\alpha(\delta)}$ *вида* (3.5) *равномерно сходится при* $\delta \to 0$ *к точному решению в* $D(F+\varepsilon, H-\varepsilon)$, $\quad 0 < \varepsilon < 0,5(H - \max\limits_{(r,\varphi)} F(r,\varphi))$.

Доказательство теоремы 3.1 повторяет доказательство соответствующей теоремы в [3].

Формулы (3.5), (3.4) и (3.1) дают, таким образом, приближенное решение поставленной задачи (1.1).

4. Приложение результатов к обратной задаче термографии

Построенное решение задачи (1.1) может быть использовано для решения обратной задачи термографии [8] в приложении к задачам математической обработки термограмм в тепловизионных исследованиях в медицине [1]. При моделировании участка тела пациента к задаче (1.1) приводит модель теплопроводящего тела цилиндрической формы, содержащего стационарные источники тепла. С учетом кровотока [2] стационарное распределение температуры внутри тела описывается метагармоническим уравнением. На боковой поверхности цилиндра поддерживается постоянная температура, что соответствует первому краевому условию в (1.1), а на поверхности S имеет место конвективный теплообмен с внешней средой, описываемый законом Ньютона. В этом случае поток тепла через поверхность S, т. е. нормальная производная, прямо пропорционален разности температур внутри тела и снаружи, что соответствует третьему краевому условию. Если распределение температуры на поверхности S (термограмма) может быть измерено как функция f, например, тепловизионными методами, то в рамках описанной модели оказывается известной и нормальная производная, что приводит к рассмотренной здесь задаче (1.1) восстановления пространственного распределения температуры, аномалии которого могут быть связаны с патологиями внутренних органов пациента. Кроме того, след функции распределения температуры на плоскости $z = H$, более близкой к источникам, чем поверхность S, может рассматриваться как скорректированная термограмма, более точно передающая изображение тепловыделяющей структуры, связанной с патологиями.

References

[1] Г. Р. Иваницкий, “Тепловидение в медицине”, *Вестник РАН*, **76**:1 (2006), 48–58. [G. R. Ivanitskii, “Thermovision in medicine”, *Herald of the Russian Academy of Sciences*, **76**:1 (2006), 48–58 (In Russian)].

[2] J. P. Agnelli, A. A. Barrea, C. V. Turner, “Tumor location and parameter estimation by thermography”, *Mathematical and Computer Modelling*, **53**:7-8 (2011), 1527–1534.

[3] Е. Б. Ланеев, Б. Васудеван, “Об устойчивом решении одной смешанной задачи для уравнения Лапласа”, *Вестник РУДН. Серия Прикладная математика и информатика*, 1999, №1, 128–133. [E. B. Laneev, B. Vasudevan, “On a stable solution of a mixed problem for the Laplace equation”, *PFUR Reports. Series: Applied mathematics and computer science*, 1999, №1, 128–133 (In Russian)].

[4] Е. Б. Ланеев, “О построении функции Карлемана на основе метода регуляризации Тихонова в некорректно поставленной задаче для уравнения Лапласа”, *Дифференциальные уравнения*, **54**:4 (2018), 483–491; англ. пер.:E. B. Laneev, “Construction of a Carleman Function Based on the Tikhonov Regularization Method in an Ill-Posed Problem for the Laplace Equation”, *Differential Equations*, **54**:4 (2018), 476–485.

[5] Е. Б. Ланеев, Д. Ю. Быков, А. В. Зубаренко, О. Н. Куликова, Д. А. Морозова, Е. В. Шунин, “Об одной некорректно поставленной краевой задаче для уравнения Лапласа в круговом цилиндре”, *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:133 (2021), 35–43. [E. B. Laneev, D. Yu. Bykov, A. V. Zubarenko, O. N. Kulikova, D. A. Morozova, E. V. Shunin, “On an ill-posed boundary value problem for the Laplace equation in a circular cylinder”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:133 (2021), 35–43 (In Russian)].

[6] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1979. [A. N. Tikhonov, V. Ya. Arsenin, *Methods for Solving Ill-posed Problems*, Nauka Publ., Moscow, 1979 (In Russian)].

[7] А. Н. Тихонов, В. Б. Гласко, О. К. Литвиненко, В. Р. Мелихов, “О продолжении потенциала в сторону возмущающих масс на основе метода регуляризации”, *Изв. АН СССР. Физика Земли*, 1968, №1, 30–48. [A. N. Tikhonov A.N., V. B. Glasko, O. K. Litvinenko, V. R. Melikhov, “On the continuation of the potential towards the perturbing masses based on the regularization method”, *Izv. AN SSSR. Fizika Zemli*, 1968, №1, 30–48 (In Russian)].

[8] Е. Б. Ланеев, М. Н. Муратов, “Об одной обратной задаче к краевой задаче для уравнения Лапласа с условием третьего рода на неточно заданной границе”, *Вестник РУДН. Серия Математика*, **10**:1 (2003), 100–110. [E. B. Laneev, M. N. Muratov,, “An inverse problem to a boundary value problem for the Laplace equation with a condition of the third kind on an inexactly specified boundary”, *PFUR Reports. Series: Mathematics*, **10**:1 (2003), 100–110 (In Russian)].

Информация об авторах

Ланеев Евгений Борисович, доктор физико-математических наук, профессор Математического института им. С. М. Никольского. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация.
E-mail: elaneev@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4255-9393

Анисимов Виктор Александрович, студент магистратуры, Математический институт им. С. М. Никольского. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: dm.yurievich@mail.ru

Information about the authors

Evgeniy B. Laneev, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of S. M. Nikol’skii Mathematical Institute. Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation. E-mail: elaneev@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4255-9393

Viktor A. Anisimov, Master’s Degree. S. M. Nikol’skii Mathematical Institute. Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation.
E-mail: dm.yurievich@mail.ru

Лесик Полина Александровна, аспирант, Математический институт им. С. М. Никольского. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация.
E-mail: polinalesik@yandex.ru

Ремезова Виктория Ивановна, студент, Математический институт им. С. М. Никольского. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация.
E-mail: remezova.98@mail.ru

Романов Андрей Андреевич, аспирант, Математический институт им. С. М. Никольского. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация.
E-mail: an1romanov@gmail.com

Хегай Анна Георгиевна, студент магистратуры, Математический институт им. С. М. Никольского. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация.
E-mail: annhegay98@gmail.com

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Ланеев Евгений Борисович
E-mail: elaneev@yandex.ru

Поступила в редакцию 30.08.2021 г.
Поступила после рецензирования 15.11.2021 г.
Принята к публикации 27.11.2021 г.

Polina A. Lesik, Post-Graduate Student. S. M. Nikol'skii Mathematical Institute. Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation.
E-mail: polinalesik@yandex.ru

Viktoriya I. Remezova, Student. S. M. Nikol'skii Mathematical Institute. Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation.
E-mail: remezova.98@mail.ru

Andrey A. Romanov, Post-Graduate Student. S. M. Nikol'skii Mathematical Institute. Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation.
E-mail: an1romanov@gmail.com

Anna G. Khegai, Master's Degree. S. M. Nikol'skii Mathematical Institute. Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation.
E-mail: annhegay98@gmail.com

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Evgeniy B. Laneev
E-mail: elaneev@yandex.ru

Received 30.08.2021
Reviewed 15.11.2021
Accepted for press 27.11.2021